Equations différentielles

15 mars 2017

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$
   La dérivée de la fonction est égale à elle même

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$
   La dérivée de la fonction est égale à elle même
3. $y' + 3y = 0 \quad (3)$

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$
   La dérivée de la fonction est égale à elle même
3. $y' + 3y = 0 \quad (3)$
   On a va utiliser une formule de dérivation.

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$
   La dérivée de la fonction est égale à elle même
3. $y' + 3y = 0 \quad (3)$
   On a va utiliser une formule de dérivation.

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. $y' = 0 \quad (1)$
   La dérivée de la fonction est nulle.
2. $y' = y \quad (2)$
   La dérivée de la fonction est égale à elle même
3. $y' + 3y = 0 \quad (3)$
   On a va utiliser une formule de dérivation.

Résoudre une équation différentielle

C'est trouver *toutes* les fonctions dérivables vérifiant l'équation.

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-at}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

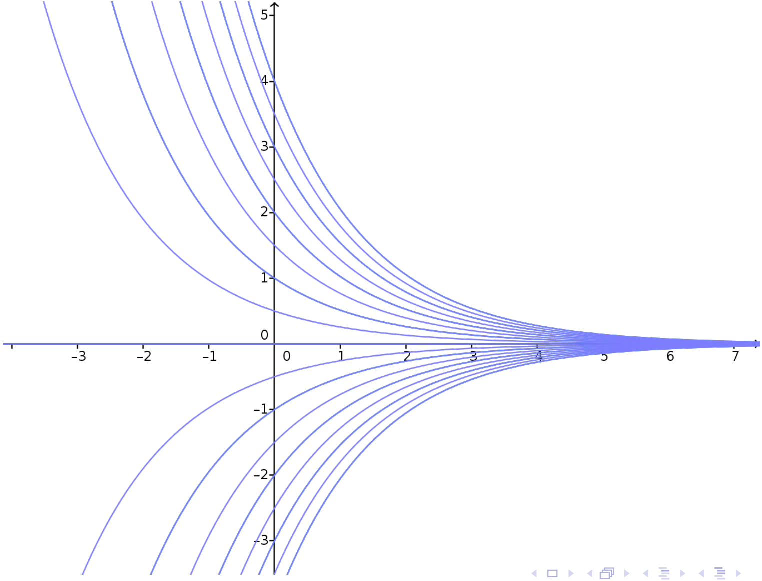
Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

$(E_1)\, y' + \dfrac{2}{3}y = 0$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y \ : \ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Interprétation graphique



Uncité de la solution

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Uncité de la solution

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto \lambda e^{-\frac{2x}{3}}$. Donc $y(0) = 3 = \lambda$.

Uncité de la solution

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y\ :\ x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$. Donc $y(0) = 3 = \lambda$.

La solution est la fonction $f\ :\ x \longmapsto 3\mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}}$.

Définitions

Définition

On considère l'équation différentielle

$$y' + u(x).y = v(x) \quad (*)$$

où u et v sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Une telle équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résolue.

Résoudre cette équation différentielle c'est trouver une fonction f dérivable sur I (en pratique de classe $\mathscr{C}^1$ c'est à dire dérivable et de dérivée continue) telle que

$$\forall x \in I,\ f'(x) + u(x).f(x) = v(x).$$

Définitions

Définition

On appelle **équation homogène** associée à (*) l'équation :

$$y' + u(x).y = 0 \quad (**)$$

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème (Solution de l'équation homogène $(**)$)

L'ensemble des solutions de $(**)$ *est formé des fonctions définies sur I par*

$$\forall x \in I, y(x) = \lambda \exp(-U(x)) = \lambda \mathrm{e}^{-U(x)}$$

où U est une primitive de u sur I et λ *un scalaire quelconque de* $\mathbb{K}$*.*

Structure de l'ensemble des solutions

Théorème (Solution de l'équation homogène $(**)$)

L'ensemble des solutions de $(**)$ est formé des fonctions définies sur I par

$$\forall x \in I, y(x) = \lambda \exp(-U(x)) = \lambda \, \mathrm{e}^{-U(x)}$$

où U est une primitive de u sur I et λ un scalaire quelconque de $\mathbb{K}$.

Remarque

L'ensemble des solutions de $(**)$ est ici un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ *s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène* $(**)$ *une solution particulière de* $(*)$.

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \mapsto ax + b$

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \mapsto ax + b$
  - On trouve que $x \mapsto -x - \frac{1}{3}$ est une solution particulière

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \mapsto ax + b$
  - On trouve que $x \mapsto -x - \frac{1}{3}$ est une solution particulière
- L'ensemble des solutions de (1) est

$$y(x) = \lambda \, \mathrm{e}^{3x} - x - \frac{1}{3} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Linéarité par rapport au second membre

Propriété

Soient α et β dans $\mathbb{K}$. On note :
y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + u(x)y = v_1(x)$,
y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + u(x)y = v_2(x)$,
alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + u(x)y = \alpha v_1(x) + \beta v_2(x).$$

Lorsque $\alpha = \beta = 1$, on dit qu'on superpose les solutions.

Variation de la constante

Nous savons résoudre l'équation sans second membre : le problème sera souvent de trouver une solution particulière.

Théorème

Si $x \mapsto \lambda f(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, on cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = \lambda(x) f(x)$$

où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable de la variable x.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1)\quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1)\quad xy'-2y=x^3\mathrm{e}^x$
  - Equation différentielle homogène $xy'-2y=0$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x) x^2$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1)\quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x)x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x)x^2 = x^3\,e^x$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x)x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x)x^2 = x^3 e^x$$

donc

$$\lambda'(x) = e^x \text{ et } \lambda(x) = e^x$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x)x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x)x^2 = x^3 e^x$$

donc

$$\lambda'(x) = e^x \text{ et } \lambda(x) = e^x$$

- Donc la solution générale de (1) est $x \mapsto \lambda x^2 + x^2 e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'+(1-2x)y=x^2$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite
    $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

Exemples

- Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2 y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière : $g(x) = \lambda(x) x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y'+(1-2x)y=x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y'+(1-2x)y=0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite
    $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=0 \Leftrightarrow y'+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)y=0$
    - solution de l'équation homogène $f(x)=\lambda\exp\left(-\int\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx=\lambda x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :
      $g(x)=\lambda(x)x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
      on remplace g dans (1)
      $$x^2\lambda'(x)x^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=x^2$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite
    $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :
      $g(x) = \lambda(x)x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
      on remplace g dans (1)
      $$x^2\lambda'(x)x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x^2$$
      donc $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite
    $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :
      $g(x) = \lambda(x)x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
      on remplace g dans (1)
      $$x^2\lambda'(x)x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x^2$$
      donc $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$
    - Donc la solution générale de (1) est $x \mapsto \lambda x^2\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ *avec* P *une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré*

- $\deg P$ *si* a *est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si* $a = 0$ *(évident, il s'agit des primitives de* P*)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

1. solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda e^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

1. solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. solution particulière $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}$

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*
- $(\deg P) + 1$ *si α est racine de cette équation.*

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)e^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*
- $(\deg P) + 1$ *si α est racine de cette équation.*

Remarque

Si on prend $m = 0$, on revient au cas précédent.

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,e^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,e^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)\,e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x}$

- solution $y(x) = (x + \lambda)\,\mathrm{e}^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)\,\mathrm{e}^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1 + \mathrm{e}^{-3x}$

- On utilise la linéarité par rapport au second membre

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\,e^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)\,e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1 + e^{-3x}$

- On utilise la linéarité par rapport au second membre
- $y(x) = \lambda\,e^{-3x} + \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}}_{\text{sol° part pour}\,x^2+1} + \underbrace{x\,e^{-3x}}_{\text{sol° part pour}\,e^{-3x}}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Cas particulier $P(x)\cos(x)$ ou $P(x)\sin(x)$

Cela sera surtout pratique quand le second membre sera du type $P(x)\cos(\omega x)$, cas très fréquent en physique. Il suffira alors de revenir au dernier cas étudié en introduisant les seconds membres $P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ puis $P(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$. Il restera à faire la demi-somme des solutions particulières trouvées puisque $\cos(\omega x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}$,
si *a* est **un réel** on peut alors utiliser le fait que la solution est **la partie réelle** de la solution particulière associée à $P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$

Exemple

Résoudre $y' + 4y = 2x\cos(2x)$

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).

Exemple

Exemple

Considérons l'équation différentielle $(E) : y'' - 2y' + y = x^2$

- Montrez que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 4x + 6$ est une solution de (E).
- Montrez que f est la seule fonction polynômiale du second degré solution de (E).
- Montrez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2x - 5)e^x + x^2 + 4x + 6$ est une autre solution de (E).
- Montrez que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (32x - 80)e^x + x^2 + 4x + 6$ est aussi solution de (E).

Équations linéaires à coefficients constants

Définition

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

avec a, b, c des réels et f une fonction continue sur un intervalle I.

Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$
l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Remarque

D'où provient cette équation ?

Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Remarque

D'où provient cette équation ?

- regardons si une fonction exponentielle $f : x \longmapsto e^{rx}$ peut-être solution au problème.

Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Remarque

D'où provient cette équation ?

- regardons si une fonction exponentielle $f : x \mapsto e^{rx}$ peut-être solution au problème.
- On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$, $\left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} = 0$

Équation caractéristique

Définition

On appelle équation caractéristique de l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$ l'équation d'inconnue r

$$ar^2 + br + c = 0$$

Remarque

D'où provient cette équation ?

- regardons si une fonction exponentielle $f : x \mapsto e^{rx}$ peut-être solution au problème.
- On obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$, $\left(ar^2 + br + c\right)e^{rx} = 0$
- comme e^{rx} est non nul, une condition nécessaire est

$$ar^2 + br + c = 0$$

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0 \quad (**)$

Théorème

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0 \quad (**)$

Théorème

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r et s les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{rx} + Be^{sx}$ où A et B sont des constantes réelles.*

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0 \quad (**)$

Théorème

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r et s les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto Ae^{rx} + Be^{sx}$ où A et B sont des constantes réelles.*
- *Si l'équation admet une racine double r (nécessairement réelle) les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \longmapsto (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des constantes réelles.*

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0 \quad (**)$

Théorème

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r et s les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto Ae^{rx} + Be^{sx}$ où A et B sont des constantes réelles.*
- *Si l'équation admet une racine double r (nécessairement réelle) les solutions de $(**)$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto (Ax + B)e^{rx}$ où A et B sont des constantes réelles.*
- *Si l'équation caractéristique admet deux racines conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $s = \alpha - i\beta$ alors les solutions de $(**)$ sont les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ où A et B sont des constantes réelles.*

Solutions de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0 \quad (**)$

Théorème

- *Si l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes* r *et* s *les solutions de* $(**)$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions* $x \mapsto Ae^{rx} + Be^{sx}$ *où* A *et* B *sont des constantes réelles.*
- *Si l'équation admet une racine double* r *(nécessairement réelle) les solutions de* $(**)$ *sur* $\mathbb{R}$ *sont les fonctions* $x \mapsto (Ax + B)e^{rx}$ *où* A *et* B *sont des constantes réelles.*
- *Si l'équation caractéristique admet deux racines conjuguées* $r = \alpha + i\beta$ *et* $s = \alpha - i\beta$ *alors les solutions de* $(**)$ *sont les fonctions* $x \mapsto e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *où* A *et* B *sont des constantes réelles.*

Remarque

L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discriminant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

où A et B sont des constantes réelles.

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

$\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

- $\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*
- $\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*
- $\Delta < 0$ *alors* $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *(*$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *racines conjuguées de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

$\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*

$\Delta < 0$ *alors* $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *(*$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *racines conjuguées de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Exemples

Résoudre

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

$\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*

$\Delta < 0$ *alors* $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *(*$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *racines conjuguées de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

$\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*

$\Delta < 0$ *alors* $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *(*$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *racines conjuguées de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$

Autre formulation

Théorème

Les solutions de l'équation caractéristique dépendent du discrimant de $ar^2 + br + c \quad (E_c)$

$\Delta > 0$ *alors* $y(x) = Ae^{rx} + Be^{sx}$ *(r et s les deux racines réelles de* E_c*)*

$\Delta = 0$ *alors r et* $y(x) = (Ax + B)e^{rx}$ *(r l'unique racine de* E_c*)*

$\Delta < 0$ *alors* $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ *(*$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ *racines conjuguées de* E_c*)*

où A et B sont des constantes réelles.

Exemples

Résoudre

- $y'' - 6y' + 9y = 0$
- $y'' - 2y' + 5y = 0$
- $2y'' - 5y' + 3y = 0$ avec $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$

Comme dans le cas du premier ordre

Théorème

Pour obtenir la solution générale de l'équation

$$(E)\ :\ ay'' + by' + cy = f(x)$$

on ajoute la solution générale de l'équation sans second membre à une solution particulière de (E).

mais il est plus difficile de trouver une solution particulière, sauf dans quelques cas particuliers à connaître.

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*
- *$n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;*

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- n *si* a, b *et* c *sont tous non nuls ;*
- $n+1$ *si* $a \neq 0$, $b \neq 0$ *et* $c = 0$ *;*
- $n+2$ *si* $a \neq 0$ *et* $b = c = 0$.

Le second membre est une fonction polynôme

Théorème

Si $ay'' + by' + cy = P(x)$ avec P une fonction polynôme de degré n, alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- *n si a, b et c sont tous non nuls ;*
- *$n+1$ si $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $c = 0$;*
- *$n+2$ si $a \neq 0$ et $b = c = 0$.*

Exemples

Résoudre $y'' - 2y' - 3y = 2x^2 - 1$

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ et l'équation devient

$$az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème

Soit P un polynôme de degré n, α un complexe non nul alors une solution particulière de $(*)$ est de la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est :

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ et l'équation devient

$$az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème

Soit P un polynôme de degré n, α un complexe non nul alors une solution particulière de $(*)$ est de la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est :

- *un polynôme de degré n si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;*

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ et l'équation devient

$$az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème

Soit P un polynôme de degré n, α un complexe non nul alors une solution particulière de $(*)$ est de la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est :

- *un polynôme de degré n si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;*
- *un polynôme de degré $n+1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique ;*

$f(x)$ est de la forme $P(x)e^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)e^{\alpha x}$ et l'équation devient

$$az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème

Soit P un polynôme de degré n, α un complexe non nul alors une solution particulière de $(*)$ est de la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est :

- *un polynôme de degré n si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;*
- *un polynôme de degré $n+1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique ;*
- *un polynôme de degré $n+2$ si α est racine double de l'équation caractéristique .*

$f(x)$ est de la forme $P(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

On se ramène au cas précédent en posant $y(x) = z(x)\,\mathrm{e}^{\alpha x}$ et l'équation devient

$$az'' + (2a\alpha + b)z' + (a\alpha^2 + b\alpha + c)z = P(x)$$

On obtient alors le théorème suivant

Théorème

Soit P un polynôme de degré n, α un complexe non nul alors une solution particulière de $(*)$ est de la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ où Q est :

- *un polynôme de degré n si α n'est pas racine de l'équation caractéristique ;*
- *un polynôme de degré $n+1$ si α est racine simple de l'équation caractéristique ;*
- *un polynôme de degré $n+2$ si α est racine double de l'équation caractéristique .*

Exemple

Résoudre $y'' - y = 2x\,\mathrm{e}^{x}$

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

Cas de la racine double

Ce théorème permet de rechercher une solution à partir de coefficients indéterminés mais lorsque α est racine double il vaut mieux rechercher une solution sous la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ et utiliser la démonstration du théorème.

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

Cas de la racine double

Ce théorème permet de rechercher une solution à partir de coefficients indéterminés mais lorsque α est racine double il vaut mieux rechercher une solution sous la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ et utiliser la démonstration du théorème.

Remarque 1

Si a, b et c sont réels et si le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ avec P un polynôme réel, on peut chercher les solutions comme partie réelle ou imaginaire de l'équation avec second membre $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$..

$f(x)$ est de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $m \in \mathbb{R}$ou $\mathbb{C}$

Cas de la racine double

Ce théorème permet de rechercher une solution à partir de coefficients indéterminés mais lorsque α est racine double il vaut mieux rechercher une solution sous la forme $y = e^{\alpha x}Q(x)$ et utiliser la démonstration du théorème.

Remarque 1

Si a, b et c sont réels et si le second membre est de la forme $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ avec P un polynôme réel, on peut chercher les solutions comme partie réelle ou imaginaire de l'équation avec second membre $P(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$..

Remarque 2

Si a, b et c sont réels et si le second membre est un polynôme réel en $\sin(x)$ et $\cos(x)$ on peut linéariser puis en utilisant l'additivité par rapport au second membre se ramener à des seconds membres du type précédent.

Exercice

Exercice

a) $y'' + y = e^x$ b) $y'' - 2y' = (x+1)e^{2x}$

c) $y'' - 5y' + 6y = e^{-x}\sin x$ d) $y'' - 4y' + 3y = xe^x \cos x.$

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

- il s'agit d'une équation à variables séparables

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

- il s'agit d'une équation à variables séparables
- intérêt :

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

- il s'agit d'une équation à variables séparables
- intérêt :
  - on peut dans certains trouver une primitive de chacun des membres vu comme une fonction en y dans le membre de gauche et une fonction en x dans le membre de droite

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

- il s'agit d'une équation à variables séparables
- intérêt :
  - on peut dans certains trouver une primitive de chacun des membres vu comme une fonction en y dans le membre de gauche et une fonction en x dans le membre de droite
  - $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \alpha$ important n'oubliez pas la constante.

Équations à variables séparables

Définition

Une équation différentielle à variables séparables est de la forme

$$g(y)y' = h(x)$$

avec g et h deux fonctions.

Exemple

On considère l'équation $yy' = \mathrm{e}^{2x}$

- il s'agit d'une équation à variables séparables
- intérêt :
  - on peut dans certains trouver une primitive de chacun des membres vu comme une fonction en y dans le membre de gauche et une fonction en x dans le membre de droite
  - $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \alpha$ important n'oubliez pas la constante.
  - Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $y = \pm\sqrt{\mathrm{e}^{2x} + 2\alpha}$ avec $x \in \mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$ et $x \geq \frac{1}{2}\ln(-2\alpha)$ si $\alpha < 0$.

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$
   1.2 $y' = y \ln x$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$
   1.2 $y' = y \ln x$
2. $y' - xe^{-y} = 0$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$
   1.2 $y' = y \ln x$
2. $y' - xe^{-y} = 0$
3. $y^2 + (x+1)y' = 0$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$
   1.2 $y' = y \ln x$
2. $y' - xe^{-y} = 0$
3. $y^2 + (x+1)y' = 0$
4. $x^2y' + y = 3$

Exercice

Théorème

Considérions une équation différentielle « à variables séparables » $g(y)y' = h(x)$.
Si G et H sont des primitives respectives de g et h , la solution d'une telle équation est donnée par :

$$G(y) = H(x) + \alpha$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Exercice

1. Equation linéaire du premier ordre
   1.1 $(x-1)y' + xy = 0.$
   1.2 $y' = y \ln x$
2. $y' - xe^{-y} = 0$
3. $y^2 + (x+1)\, y' = 0$
4. $x^2 y' + y = 3$
5. $y' = e^{x+y}$

Point de vue de Malthus

Dans son Essai sur le principe de population (1798), pamphlet contre les idées généreuses et optimistes de Condorcet et William Godwin, il prédit que la population augmente de façon exponentielle ou géométrique (par exemple : 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...) tandis que les ressources croissent de façon arithmétique (1, 2, 3, 4, 5, 6, ...). Il en conclut à l'inévitabilité de catastrophes démographiques, à moins d'empêcher la population de croître.

Les anciens régulateurs démographiques (les guerres et les épidémies) ne jouant plus leur rôle, il imagine de nouveaux obstacles, comme la limitation de la taille des familles ou le recul de l'âge du mariage pour la population pauvre ces restrictions étant volontaires.

Il prône aussi l'arrêt de toute aide aux nécessiteux, en opposition aux lois de Speenhamland.

FIGURE – Thomas Malthus (1766-1834)

Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, avec $t \in [0; +\infty[$
S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire.
Soient a le taux de mortalité et b le taux de natalité de cette population.

Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, avec $t \in [0; +\infty[$
S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire.
Soient a le taux de mortalité et b le taux de natalité de cette population.

1. Quelle relation peut-on en déduire ?

Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, avec $t \in [0; +\infty[$
S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire.
Soient a le taux de mortalité et b le taux de natalité de cette population.

1. Quelle relation peut-on en déduire ?
2. Le problème se ramène à étudier l'équation différentielle (E) : $N' = kN$, avec k une constante réelle $(k = b - a)$ dont les solutions :

Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, avec $t \in [0; +\infty[$
S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire.
Soient a le taux de mortalité et b le taux de natalité de cette population.

1. Quelle relation peut-on en déduire ?
2. Le problème se ramène à étudier l'équation différentielle (E) : $N' = kN$, avec k une constante réelle $\left(k = b - a\right)$ dont les solutions :
    2.1 sont les fonctions $N(t) = N(0)e^{kt}$ avec k réel.

Croissance exponentielle

Soit $N(t)$ l'effectif d'une population à l'instant t, avec $t \in [0; +\infty[$
S'il n'y a pas de migrations, et si les naissances et les morts sont proportionnelles à la taille de la population, on obtient une équation linéaire.
Soient a le taux de mortalité et b le taux de natalité de cette population.

1. Quelle relation peut-on en déduire ?
2. Le problème se ramène à étudier l'équation différentielle (E) : $N' = kN$, avec k une constante réelle $(k = b - a)$ dont les solutions :
   2.1 sont les fonctions $N(t) = N(0)e^{kt}$ avec k réel.
   2.2 Donner l'alllure pour des valeurs de k positifs et négatifs.

Désintégration d'un noyau radioactif

Enoncé

On rappelle la loi de désintégration des noyaux radioactifs

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où $N(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant t. On note $\tau = 1/\lambda$ le temps caractéristique.

Désintégration d'un noyau radioactif

Enoncé

On rappelle la loi de désintégration des noyaux radioactifs

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où $N(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant t. On note $\tau = 1/\lambda$ le temps caractéristique.

1. Exprimez en fonction de τ la demi-vie $t_{0,5}$, temps au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié.

Désintégration d'un noyau radioactif

Enoncé

On rappelle la loi de désintégration des noyaux radioactifs

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

où $N(t)$ est le nombre de noyaux à l'instant t. On note $\tau = 1/\lambda$ le temps caractéristique.

1. Exprimez en fonction de τ la demi-vie $t_{0,5}$, temps au bout duquel $N(t)$ a diminué de moitié.
2. Le carbone 14 est renouvelé constamment chez les êtres vivants. À leur mort, il se désintègre avec une demi-vie de 5730 ans. Si un fragment d'aile de moustique contient 71% de sa quantité initiale de C_{14}, quel âge a le moustique ?

Limite du modèle

En 1859, Thomas Austin, un propriétaire de terrain intoduisit 24 lapins en Australie. N'ayant pas de prédateurs et un continent entier à leurs dispositions, ils se sont développés de manière exponentielle pour se retrouver environ 22 millions 6ans plus tard et en 1920 la population atteint les 10 milliards.
Voir: Les animaux envahisseurs de l'Australie

Limite du modèle

Le défaut principal de ce modèle est qu'il est peu réaliste qu'une population croisse indéfiniment à vitesse exponentielle. En effet, il faut tenir compte des ressources dont dispose cette population, qui vont rapidement s'épuiser si la population croît.

Point de vue de Verhulst

Vers 1840, Pierre François Verhulst
remet en cause le modèle malthusien en proposant
un modèle qui tient compte des limites de la population.
Ce modèle appelé modèle
logistique s'est révélé d'une précision relativement correcte.
Ce modèle lui permet de donner en 1837 une prévision
de la population de la France en 1930 de 40 millions,
prévision somme toute raisonnable puisque la population
de la France, en réalite, est de 41,5 millions en 1931.
Ce même modèle est utilisable
pour des réactions autocatalytiques, réaction chimique
dont le catalyseur figure parmi les produits de la réaction.

FIGURE – Pierre-François Verhulst (1804-1849)

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$
   2.2 $a = 0,1$ $m = 2$ et $y(0) = 1$

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$
   2.2 $a = 0,1$ $m = 2$ et $y(0) = 1$
3. Résolution de cette équation différentielle

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$
   2.2 $a = 0,1$ $m = 2$ et $y(0) = 1$
3. Résolution de cette équation différentielle
   3.1 Montrer que $E \iff \frac{y'}{y} + \frac{y'}{m-y} = am (E_1)$ pour y différent de 0 et m.

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   - 2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$
   - 2.2 $a = 0,1$ $m = 2$ et $y(0) = 1$
3. Résolution de cette équation différentielle
   - 3.1 Montrer que $E \Longleftrightarrow \frac{y'}{y} + \frac{y'}{m-y} = am(E_1)$ pour y différent de 0 et m.
   - 3.2 Résoudre (E_1), en supposant que $0 < y < m$.

Equation logistique

Définition

L'équation différentielle devient

$$y' = ay \underbrace{(m-y)}_{\text{terme correctif}} = ay(m-y) \quad (E)$$

où a et m sont des constantes positives.

1. Quelles sont les solutions constantes de cette équation différentielle ?
2. Faites l'études des solutions dans les cas particuliers
   2.1 $a = 0,1$ $m = 1$ et $y(0) = 2$
   2.2 $a = 0,1$ $m = 2$ et $y(0) = 1$
3. Résolution de cette équation différentielle
   3.1 Montrer que $E \iff \frac{y'}{y} + \frac{y'}{m-y} = am\,(E_1)$ pour y différent de 0 et m.
   3.2 Résoudre (E_1), en supposant que $0 < y < m$.
   3.3 Montrer que y peut s'écrire sous la forme $y(t) = \frac{m}{1+Ce^{-amt}}$ où $C = \frac{m-y(0)}{y(0)}$

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1 - x)y = \mathrm{e}^{2x}$$

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1-x)y = e^{2x}$$

1. Mettez l'équation sous forme normalisée.

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1 - x)y = e^{2x}$$

1. Mettez l'équation sous forme normalisée.
2. Résolvez l'équation différentielle obtenue.

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1 - x)y = e^{2x}$$

1. Mettez l'équation sous forme normalisée.
2. Résolvez l'équation différentielle obtenue.
3. Raccord en 0 :

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1 - x)y = e^{2x}$$

1. Mettez l'équation sous forme normalisée.
2. Résolvez l'équation différentielle obtenue.
3. Raccord en 0 :
    3.1 Déterminez les valeurs des constantes pour que les solutions soient continues en 0.

Exemple

Exemple

On cherche à résoudre l'équation différentielle

$$xy' + (1-x)y = \mathrm{e}^{2x}$$

1. Mettez l'équation sous forme normalisée.
2. Résolvez l'équation différentielle obtenue.
3. Raccord en 0 :
    3.1 Déterminez les valeurs des constantes pour que les solutions soient continues en 0.
    3.2 En utilisant, les taux d'accroissement et les développements limités, montrez que la solution est dérivable également en 0.