Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$
  La dérivée de la fonction est égale à elle même

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$
  La dérivée de la fonction est égale à elle même
- $y' + 3y = 0 \quad (3)$

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$
  La dérivée de la fonction est égale à elle même
- $y' + 3y = 0 \quad (3)$
  On a va utiliser une formule de dérivation.

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$
  La dérivée de la fonction est égale à elle même
- $y' + 3y = 0 \quad (3)$
  On a va utiliser une formule de dérivation.

Quelques exemples

Exemples

On cherche une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $y' = 0 \quad (1)$
  La dérivée de la fonction est nulle.
- $y' = y \quad (2)$
  La dérivée de la fonction est égale à elle même
- $y' + 3y = 0 \quad (3)$
  On a va utiliser une formule de dérivation.

Résoudre une équation différentielle

C'est trouver *toutes* les fonctions dérivables vérifiant l'équation.

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda e^{-ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \longmapsto \lambda e^{-ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

Equation $y' + ay = 0$

Théorème

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions

$$x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-ax}$$

où λ est une constante arbitraire.

Vous aurez donc remarqué qu'il existe une infinité de fonctions vérifiant cette équation différentielle si on ne donne pas d'autre précision.

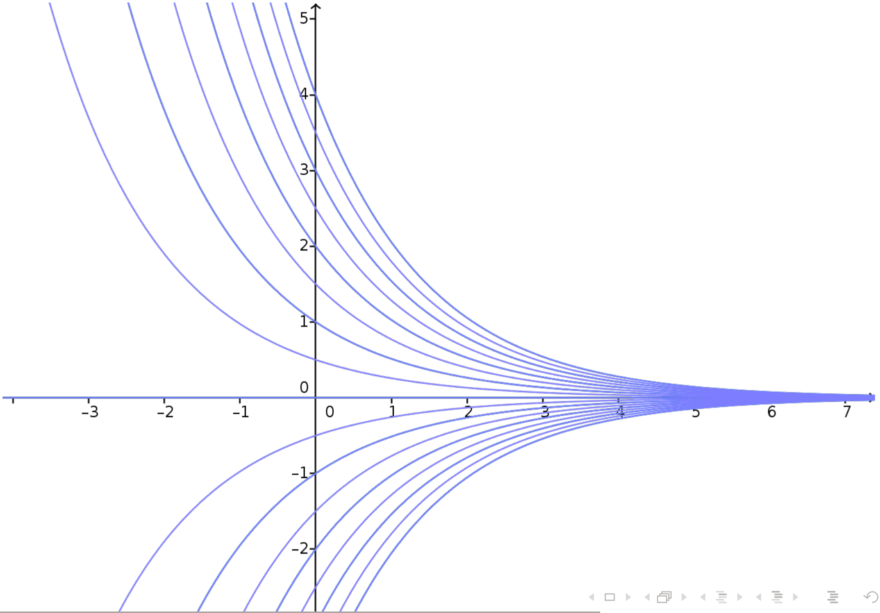
Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$

$(E_1)\ y' + \frac{2}{3}y = 0$, donc les solutions sont les fonctions de la forme

$$y\ :\ x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\frac{2x}{3}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Interprétation graphique



Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y\ :\ x \mapsto \lambda e^{-\frac{2x}{3}}$. Donc $y(0) = 3 = \lambda$.

Exemple

Résolvons $(E_1) : 3y' + 2y = 0$ sachant que $y(0) = 3$

Nous savons déjà que les solutions sont les fonctions de la forme $y \,:\, x \mapsto \lambda e^{-\frac{2x}{3}}$. Donc $y(0) = 3 = \lambda$.

La solution est la fonction $f \,:\, x \mapsto 3e^{-\frac{2x}{3}}$.

Définition

On considère l'équation différentielle

$$y' + u(x).y = v(x) \quad (*)$$

où u et v sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
Une telle équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résolue.

Résoudre cette équation différentielle c'est trouver une fonction f dérivable sur I (en pratique de classe $\mathscr{C}^1$ c'est à dire dérivable et de dérivée continue) telle que

$$\forall x \in I,\ f'(x) + u(x).f(x) = v(x).$$

Définition

On appelle **équation homogène** associée à (*) l'équation :

$$y' + u(x).y = 0 \quad (**)$$

Théorème (Solution de l'équation homogène $(**)$)

L'ensemble des solutions de $(**)$ est formé des fonctions définies sur I par

$$\forall x \in I, y(x) = \lambda \exp(-F(x)) = \lambda \, \mathrm{e}^{-F(x)}$$

où F est une primitive de u sur I et λ un scalaire quelconque de $\mathbb{K}$.

Théorème (Solution de l'équation homogène $(**)$)

L'ensemble des solutions de $(**)$ est formé des fonctions définies sur I par

$$\forall x \in I, y(x) = \lambda \exp(-F(x)) = \lambda \, \mathrm{e}^{-F(x)}$$

où F est une primitive de u sur I et λ un scalaire quelconque de $\mathbb{K}$.

Remarque

L'ensemble des solutions de $(**)$ est ici un espace vectoriel de dimension 1 sur $\mathbb{K}$.

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ *s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène* $(**)$ *une solution particulière de* $(*)$.

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \longmapsto ax + b$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \mapsto ax + b$
  - On trouve que $x \mapsto -x - \dfrac{1}{3}$ est une solution particulière

Solution de l'équation générale $(**)$

Théorème (Solution de l'équation générale $(*)$)

Les solutions de l'équation générale $(*)$ s'obtiennent en ajoutant aux solutions de l'équation homogène $(**)$ une solution particulière de $(*)$.

Exemple

Résolvons $y' = 3y + 3x \quad (1)$

- Solution de l'équation générale
- Recherche d'une solution particulière
  - sous la forme $x \mapsto ax + b$
  - On trouve que $x \mapsto -x - \dfrac{1}{3}$ est une solution particulière
- L'ensemble des solutions de (1) est

$$y(x) = \lambda e^{3x} - x - \frac{1}{3} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{K}$$

Propriété

Soient α et β dans $\mathbb{K}$. On note :
y_1 une solution de l'équation différentielle $y' + u(x)y = v_1(x)$,
y_2 une solution de l'équation différentielle $y' + u(x)y = v_2(x)$,
alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est une solution particulière de l'équation différentielle

$$y' + u(x)y = \alpha v_1(x) + \beta v_2(x).$$

Lorsque $\alpha = \beta = 1$, on dit qu'on superpose les solutions.

Variation de la constante

Nous savons résoudre l'équation sans second membre : le problème sera souvent de trouver une solution particulière.

Théorème

Si $x \mapsto \lambda f(x)$ est la solution générale de l'équation sans second membre, on cherche des solutions de l'équation différentielle sous la forme

$$y(x) = \lambda(x) f(x)$$

où $x \mapsto \lambda(x)$ est maintenant une fonction dérivable de la variable x.

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 \mathrm{e}^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x) x^2$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x}y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x)x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x)x^2 = x^3 e^x$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x) x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x)x^2 = x^3 e^x$$

donc

$$\lambda'(x) = e^x \text{ et } \lambda(x) = e^x$$

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(1) \quad xy' - 2y = x^3 e^x$
  - Equation différentielle homogène $xy' - 2y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' - \frac{2}{x} y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

$$g(x) = \lambda(x) x^2$$

on remplace g dans (1)

$$x\lambda'(x) x^2 = x^3 e^x$$

donc

$$\lambda'(x) = e^x \text{ et } \lambda(x) = e^x$$

    - ★ Donc la solution générale de (1) est $x \mapsto \lambda x^2 + x^2 e^x$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$

Exemples

- Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $x^2 y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2 y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right) y = 0$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \, \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière :

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \operatorname{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière : $g(x) = \lambda(x)x^2 \operatorname{e}^{\frac{1}{x}}$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière : $g(x) = \lambda(x)x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ on remplace g dans (1)

$$x^2\lambda'(x)x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x^2$$

Exemples

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière : $g(x) = \lambda(x)x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ on remplace g dans (1)

$$x^2\lambda'(x)x^2 \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x^2$$

donc $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

- Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $x^2y' + (1-2x)y = x^2$
- Equation différentielle homogène $x^2y' + (1-2x)y = 0$
  - Equation différentielle homogène sous forme réduite $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 0 \Leftrightarrow y' + \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)y = 0$
    - ★ solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \exp\left(-\int \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\right)dx = \lambda x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
    - ★ Méthode de variation de la constante pour la recherche de la solution particulière : $g(x) = \lambda(x)x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ on remplace g dans (1)

$$x^2\lambda'(x)x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = x^2$$

donc $\lambda'(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ et $\lambda(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

    - ★ Donc la solution générale de (1) est $x \mapsto \lambda x^2 \,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

Le second membre est une fonction polynôme

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

- solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda e^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Pour les équations différentielles à **coefficients constants**, c'est à dire $y' + ay = f(x)$

Théorème

Si $y' + ay = P(x)$ avec P une fonction polynôme , alors on cherche une solution particulière sous forme d'une fonction polynôme de degré

- $\deg P$ *si a est non nul ;*
- $\deg P + 1$ *si $a = 0$ (évident, il s'agit des primitives de P)*

Exemple

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1$

- solution de l'équation homogène $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-3x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- solution particulière $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*
- $(\deg P) + 1$ *si α est racine de cette équation.*

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)\mathrm{e}^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Théorème

Si a est un complexe non nul et si α est un complexe, les solutions particulières de

$$y' + ay = e^{\alpha x} P(x)$$

où P est un polynôme non nul, sont de la forme $y = e^{\alpha x} Q(x)$, où Q est un polynôme de degré :

- $\deg P$ *si α n'est pas racine de $x + a = 0$ (forme qui va pourra être généralisée)*
- $(\deg P) + 1$ *si α est racine de cette équation.*

Remarque

Si on prend $m = 0$, on revient au cas précédent.

Le second membre est une fonction de la forme $P(x)e^{mx}(x)$ avec $m \in \mathbb{C}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Exemple

Résoudre $y' + 3y = e^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)e^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1 + e^{-3x}$

- On utilise la linéarité par rapport au second membre

Exemple

Résoudre $y' + 3y = \mathrm{e}^{-3x}$

- solution $y(x) = (x+\lambda)\mathrm{e}^{-3x}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Résoudre $y' + 3y = x^2 + 1 + \mathrm{e}^{-3x}$

- On utilise la linéarité par rapport au second membre
- $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{-3x} + \underbrace{\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{11}{27}}_{\text{sol° part pour} x^2+1} + \underbrace{x\mathrm{e}^{-3x}}_{\text{sol° part pour} \mathrm{e}^{-3x}}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Cas particulier $P(x)\cos(x)$ ou $P(x)\sin(x)$

Cela sera surtout pratique quand le second membre sera du type $P(x)\cos(\omega x)$, cas très fréquent en physique. Il suffira alors de revenir au dernier cas étudié en introduisant les seconds membres $P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$ puis $P(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}$. Il restera à faire la demi-somme des solutions particulières trouvées puisque $\cos(\omega x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}}{2}$,

si a est **un réel** on peut alors utiliser le fait que la solution est **la partie réelle** de la solution particulière associée à $P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}$

Exemple

Résoudre $y' + 4y = 2x\cos(2x)$