Université de Strasbourg | **Année 2016-2017**

L1 Math/Info S2 | Feuille n° 1

Dérivabilité et Optimisation

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes :

(1) $\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} = 0$

(2) $\ln(x-3) + \ln(x-4) = \ln 12 \quad (1)$

(3) $\ln|x-3| + \ln|x-4| = \ln 12 \quad (2)$

(4) $\cos^2 x - \sin^2 x - \sin\alpha = 0 \quad (3)$ où α est un angle donné.

Exercice 2. Déterminer les extrema sur son domaine de définition de la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{x} + x(\ln x - 1 - \mathrm{e})$$

Exercice 3. La tangente au graphe de la fonction $x \mapsto x^3$ en un point P intersecte la courbe encore en autre point Q. Déterminer les coordonnées de Q, en fonction de celles de P.

Exercice 4. On considère l'hyperbole d'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Trouver les points sur cette hyperbole qui sont les plus proches du point $A(0, a)$ avec a un réel donné.

Exercice 5. Etudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 - \ln^2 x\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On étudiera en particulier la continuité et dérivabilité de f en 0 et le(s) point(s) d'inflexion de $\mathscr{C}$.

Exercice 6. On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (7-x)\,\mathrm{e}^{x}$, qui intervient dans le rayonnement du corps noir.

(1) (a) Après avoir justifié que f est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$, étudier ses variations et ses limites en $\pm\infty$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = 5$ a exactement deux solutions. On note α celle qui est négative. Déterminer la partie entière de α.

(2) Déterminer une primitive de f.

Exercice 7. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^{+}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

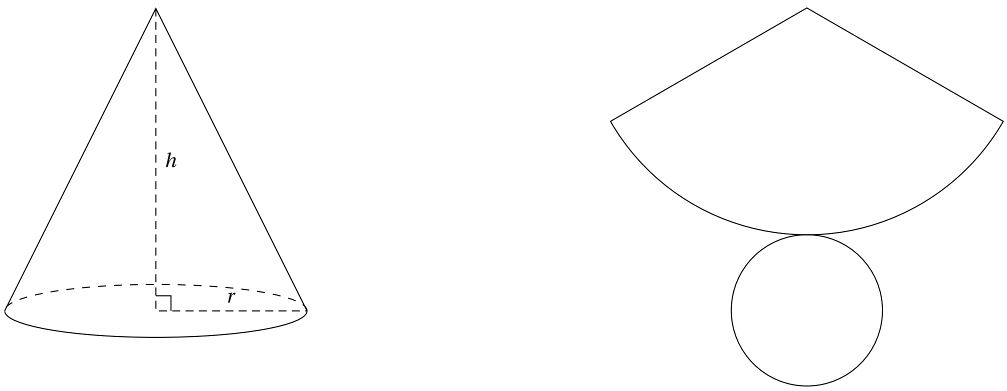
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x} \ln(1 + \mathrm{e}^{x}) \text{ et } g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$$

(1) Exprimer f' en fonction de g.

(2) Etudier les variations de g, pour trouver le signe de f.

(3) Déterminer le maximun de f.

Exercice 8. Histoire de cône



(1) L'aire d'un cône circulaire droit doit être de $4m^2$. Trouver les dimensions du cône pour lesquelles le volume est maximal.

(2) On verse de l'eau dans un réservoir en forme de cône renversé. Le réservoir mesure 50 cm de hauteur et 25 cm de diamètre au sommet. Si l'eau est versé à raison de 5 cm^3 par minute, à quelle vitesse augmente le niveau de l'eau lorsque l'eau atteint 10 cm?

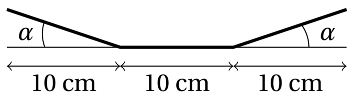
Exercice 9. On lance un caillou dans un lac. Le caillou produit des ondes circulaires à partir de son point de chute. Le rayon du cercle ainsi formé s'accroît de 3cm/s. Calculer le taux d'accroissement de l'aire du cercle par rapport au temps quand le rayon mesure 10cm.

Exercice 10. Pendant un trajet, un TGV parcourt une distance de 1000km à une certaine vitesse constante $v$km/h. Le coût de l'électricité par heure à cette vitesse est de

$$C(v) = 2048 + v^{3/2}$$

Déterminer la vitesse à laquelle le train doit rouler sur cette portion de trajet pour minimiser le coût électrique.

Exercice 11. Une gouttière est obtenue en repliant de chaque côté un tiers d'une longue feuille de zinc de 30 cm de large. Comment faut-il choisir α pour que la gouttière puisse retenir la plus grande quantité d'eau possible?



Exercice 12. Univ-Lille (Sujet 2000)

Soit $n \geq 2$ un entier fixé et $f : \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1+x^n}{(1+x)^n}, \quad x \geq 0.$$

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $f'(x)$ pour $x \geq 0$.

(2) En étudiant le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer que f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^+$ que l'on déterminera.

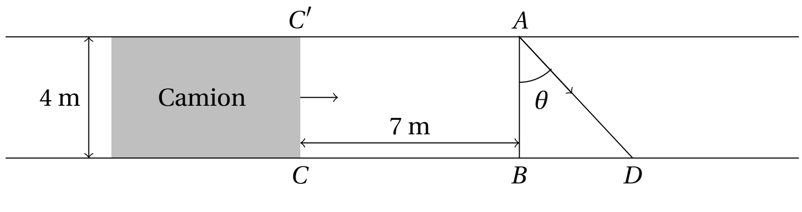
(3) En déduire l'inégalité suivante :

$$(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

(4) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in \mathbb{R}^+$ alors on a

$$(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n + y^n).$$

Exercice 13. Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.
Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h!
L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D.



Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (en radians).

(1) Déterminer en fonctio θ, les temps mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.

(2) On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$. Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

(3) Étudier les variations de f sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et dresser le tableau de variations de f.

(4) Montrer que f s'annule deux fois sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(5) Conclure.

]Compléments

Exercice 14. Soient $0 < a < b$. On considère la fonction $f \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)} \end{cases}$

(1) (a) Montrer que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{a}{(1+ax)\ln(1+ax)} - \dfrac{b}{(1+bx)\ln(1+bx)}$.

(b) Pour $x \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{(1+tx)\ln(1+tx)}$ est décroissante.

(2) Conclure.

Exercice 15. Soit $\varphi : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction continue telle qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\varphi(x) \leq \lambda \int_0^x \varphi(t)\, dt, \quad \forall x \in [0, +\infty[.$$

Soit Φ la primitive de φ telle que $\Phi(0) = 0$.

(1) Déterminer le signe de $\varphi(x) - \lambda\Phi(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

(2) Étudier les variations de $g(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}\Phi(x)$.

(3) En déduire que φ est identiquement nulle.