Université de Strasbourg **Année 2016-2017**

L1 Math/Info S2 Modélisation-Feuille n° 2

Equations différentielles

Théorème. *Les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'(t) + ay(t) = 0$ (avec a un réel ou complexe donné) sont les fonctions*

$$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-at}$$

où λ est une constante arbitraire.

Définition. On considère l'équation différentielle

$$y' + u(x).y = v(x) \quad (*)$$

où u et v sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Une telle équation est une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résolue.

On appelle **équation homogène** associée à (*) l'équation :

$$y' + u(x).y = 0 \quad (**)$$

Théorème. *On considère l'équation différentielle :*

$$y' + u(x).y = v(x) \quad (*)$$

où u et v sont continues sur I intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Les solutions sont de la forme

$$\forall x \in I,\ y(x) = \underbrace{\lambda\, \mathrm{e}^{-U(x)}}_{\text{les sol° de l'équation homogène}} + \underbrace{g(x)}_{\text{une sol° de l'équation générale}}$$

Avec U une primitive de u sur I et λ est une constante arbitraire.

Exercice 1. Pour chacune des équations suivantes, indiquer l'ordre de l'équation et vérifier que la fonction donnée est solution sur $\mathbb{R}$.

(1) $y'(x) - 2010y(x) = -2010, \qquad y(x) = e^{2010x} + 1$.

(2) $y''(t) + 9y(t) = 0, \qquad y(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$ avec A et B réels quelconque.

(3) $y'''(x) = 12, \qquad y(x) = 2x^3 + x^2 + 4x - 5$.

(4) $y'(t) + ty(t) = 0, \qquad y(t) = 3e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Exercice 2. Pour chacune des équations différentielles suivantes, trouver au moins une solution définie sur $\mathbb{R}$.

(1) $y'(x) = x^2$.

(2) $y'(x) = e^{-3x}$.

(3) $y''(t) = \sin(2t)$.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $3y' + 5y = 0$

(2) $y' = 3y$ avec $y(1) = 4$

(3) $y' + 7y = y(1)$

(4) $y'(x) + y(x) = 2 + 2x$

(5) $y'(t) = y(t) + 2\cos(2t)$

(6) $y'(x) + 4y(x) = \sin(3x)\mathrm{e}^{-4x}$

Exercice 4. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) Déterminer les solutions de
$$y' + y\tan x = 0 \ (E_h)$$
pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

(2) Déterminer les solutions de
$$y' + y\tan x = \sin x \cos x \quad (E)$$
pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

(3) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

(1) Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $y'(t) = \frac{1}{t^2} y(t)$.

(2) Pour tout $t \in]0, +\infty[$, $y'(t) = \frac{1}{t^2} y(t) + \frac{1}{t^2}$.

(3) Pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\quad 2x^2 y' + y = 1$

(4) Pour tout $t \in]-1; 1[$, $\quad \left(t^2 - 1\right) y(t)' + t y(t) + 1 = 0$

Exercice 6. Former une équation différentielle du 1er ordre admettant comme solutions les fontions
$$f : x \mapsto \lambda \sin x + \cos x \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exercice 7. Déterminer l'ensemble des fonctions f solutions de l'équation :
$$\int_0^x f(t)dt = \frac{x}{3}\left(f(x) + a\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

Exercice 8. La vitesse de refroidissement d'un corps dans l'air est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu ambiant (l'air).

— à 9h un thermomètre indiquant 70°C est placé dans un milieu à 15°C.
— 5 minutes plus tard, le thermomètre indique 45°C

Quelle est la température indiquée par le thermomètre à 9h10 ?

Exercice 9. [Évolution du Thorium 230] Le nombre $n(t)$ d'atomes de ^{230}Th présents dans un échantillon à l'instant t obéit à la loi suivante
$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t} = \lambda_1 N e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 n;$$
où λ_1, λ_2 et N sont des constantes positives avec $\lambda_1 < \lambda_2$.

(1) Calculer $n(t)$ sachant que $n(0) = 0$.

(2) Dessiner le graphe de $n(t)$ pour $t \geq 0$.