Equations différentielles autonomes

Définition. Soit f une fonction sur J intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$y' = f(y(t)) \quad (Aut)$$

Une telle équation est une équation différentielle dite **autonome**.

Théorème 1. *Soit J un intervalle ouvert sur lequel f est continue. Alors pour toute condition initiale (t_0, y_0) avec y_0 dans J, et pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une solution $\varphi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ de*

$$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$$

telle que $\varphi(t_0) = y_0$.

*Si de plus f est de classe C^1 au voisinage de y_0 , alors cette solution est **essentiellement unique** c'est à dire si une autre solution ψ vérifie $\psi(t_0) = y_0$, alors φ et ψ coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.*

Définition 2. **Il existe** un plus grand intervalle I_0 sur lequel y est l'**unique solution** de

$$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$$

et passant par(t_0, y_0). On dit que y est la **solution maximal** passant par (t_0, y_0), et on appelle I_0 l'intervalle maximal de cette solution.

Théorème 3. *On a dans le cas d'une équation différentielle autonome les équivalences suivantes*

$$f(y_0) = 0 \Longleftrightarrow y'(t) = 0 \Longleftrightarrow y(t) = y_0$$

Exercice 4. Etudier les solutions des équations différentielles suivantes

(1) $y' = 1 + y^2$
(2) $y' = y(y-1)$
(3) $y' = \sin y$
(4) $y' = \ln y$
(5) $y' = \sqrt{1-y^2}$

Exercice 5. Trouver la forme explicite des solutions des équations différentielles suivantes

(1) $y' = 1 + y^2$
(2) $y' = y(y-1)$
(3) $y' = \sin y$
(4) $y' = \exp(y)$
(5) $y' = \sqrt{1-y^2}$