Equations différentielles autonomes

Définition 1. On considère une équation différentielle du type

$$(E) \quad y' = \varphi(y, t)$$

On lui associe l'application

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \mapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi(y, t) \end{bmatrix}}.$$

Une telle application $\overrightarrow{F}$ du plan s'appelle un **champ de vecteurs** .

Définition 2. On considère

$$(E) \quad y' = \varphi(y(t), t)$$

l'équation différentielle du premier ordre (avec φ définie sur $\mathbb{R}^2$).
Une sursolution (respectivement sous-solution) de l'équation est une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g'(t) > \varphi(g(t), t)$ (respectivement $g'(t) < \varphi(g(t), t)$) pour tout t de $\mathbb{R}$.
Le graphe d'une sur-solution est appelé une barrière supérieure pour l'équation.
Le graphe d'une sous-solution est appelé une barrière inférieure pour l'équation.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle suivante, définie pour $y > 0$:

$$y'(t) = y(t)^2 \left(1 - 2ty(t)\right)$$

(1) Montrer que $v : t \mapsto \dfrac{2}{t}$ est une barrière supérieure et $w : t \mapsto \dfrac{1}{2t}$ est une barrière inférieure.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante, définie pour $y > 0$:

$$y'(t) = \frac{t^2}{y(t)} + 1,$$

et le champ de vecteur $\overrightarrow{F}$ associé sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

(1) Soit f la solution maximale de cette équation vérifiant $f(2) = 1$. Montrer que f est croissante sur son intervalle de définition.

(2) Déterminer l'ensemble des points (t, y) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ où la pente du champ de vecteur vaut 2. Tracer cet ensemble, en déduire une barrière inférieure.

(3) Montrer que l'intervalle de définition de f contient $[2, +\infty[$.

(4) Soit g une solution de l'équation différentielle $y'(t) = \dfrac{t^2}{y(t)}$ avec $g > 0$. Quel est son domaine de définition ? Montrer que le graphe de g est une barrière supérieure pour l'équation précédente. En déduire que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.