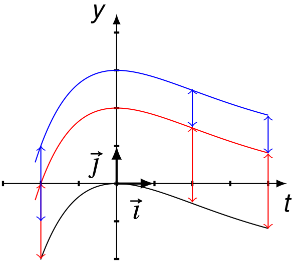
Equations différentielles autonomes

$(Int) \qquad y' = f(t)$



Les équations du type (Int) sont particulières dans le sens où deux solutions sont “verticalement parallèles”. Autrement dit, elles diffèrent d'une constante. Plus précisément, si φ est solution, alors les solutions de l'équation sont exactement les fonctions de la forme $\varphi + C$ pour une certaine constante C réelle. Réciproquement, si une équation différentielle a cette propriété, alors elle est équivalente à une équation différentielle du type (Int) : il nous suffit de prendre une solution φ et de dire que toute autre solution est aussi solution de $y'(t) = \varphi'(t)$

$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$

Definition

Les équations du type $y' = f(y(t))$ sont appelées équations différentielles autonomes.

Voici quelques exemples d'équations dites autonomes:

$$y' = 3y \qquad\qquad y' = \frac{1}{1+y^2}$$

$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$

Definition

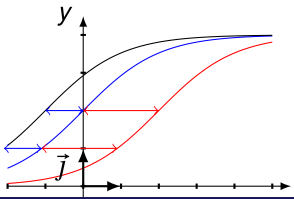
Les équations du type $y' = f(y(t))$ sont appelées équations différentielles autonomes.

Voici quelques exemples d'équations dites autonomes:

$y' = 3y \qquad\qquad y' = \dfrac{1}{1+y^2}$

Theorem

si φ est une solution de (Aut) alors $\psi : t \to \varphi(t-c)$ est également une solution.



$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$

Definition

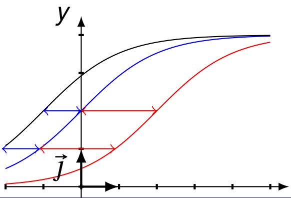
Les équations du type $y' = f(y(t))$ sont appelées équations différentielles autonomes.

Voici quelques exemples d'équations dites autonomes:

$y' = 3y \qquad\qquad y' = \dfrac{1}{1+y^2}$

Theorem

si φ est une solution de (Aut) alors $\psi : t \to \varphi(t-c)$ est également une solution.



Les sciences en fournissent des tombereaux car elles contiennent en elles le principe suivant lequel les mêmes causes produiront les mêmes effets, indépendemment de la date de l'évènement

$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$

Definition

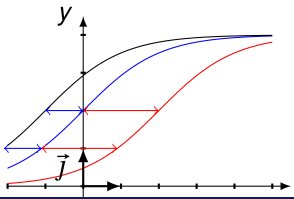
Les équations du type $y' = f(y(t))$ sont appelées équations différentielles autonomes.

Voici quelques exemples d'équations dites autonomes:

$y' = 3y \qquad\qquad y' = \dfrac{1}{1+y^2}$

Theorem

si φ est une solution de (Aut) alors $\psi : t \to \varphi(t-c)$ est également une solution.



Les sciences en fournissent des tombereaux car elles contiennent en elles le principe suivant lequel les mêmes causes produiront les mêmes effets, indépendemment de la date de l'évènement

Le théorème de Cauchy pour les équadiffs autonomes

Theorem

Soit J un intervalle ouvert sur lequel f est continue. Alors pour toute condition initiale (t_0, y_0) avec y_0 dans J, et pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, il existe une solution $\varphi :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ de

$$(Aut) \qquad y' = f(y(t))$$

telle que $\varphi(t_0) = y_0$.
Si de plus f est de classe C^1 au voisinage de y_0 , alors cette solution est essentiellement unique c'est à dire si une autre solution ψ vérifie $\psi(t_0) = y_0$, alors φ et ψ coïncident sur l'intersection de leurs intervalles de définition.

Intervalle maximal d'une solution

Dans la suite, nous supposerons toujours que f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert J.
D'après le théorème de Cauchy, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0), **il existe** un plus grand intervalle I_0 sur lequel est définie l'unique solution y passant par(t_0, y_0).

Intervalle maximal d'une solution

Dans la suite, nous supposerons toujours que f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert J.
D'après le théorème de Cauchy, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0), **il existe** un plus grand intervalle I_0 sur lequel est définie l'unique solution y passant par(t_0, y_0).

Definition

On dit que y est la solution maximal passant par (t_0, y_0), et on appelle I_0 l'intervalle maximal de cette solution.

Intervalle maximal d'une solution

Dans la suite, nous supposerons toujours que f est de classe C^1 sur un intervalle ouvert J.
D'après le théorème de Cauchy, étant donnée une condition initiale (t_0, y_0), **il existe** un plus grand intervalle I_0 sur lequel est définie l'unique solution y passant par(t_0, y_0).

Definition

On dit que y est la solution maximal passant par (t_0, y_0), et on appelle I_0 l'intervalle maximal de cette solution.

Example

On considère l'équation $y' = 3y$ avec $y'(t_0) = 5$.
La solution maximale est $y(t) = 5\,\mathrm{e}^{3(t-t_0)}$avec $I_0 = \mathbb{R}$

Solutions stationnaires et sens de variation

Les **solutions stationnaires** (fonctions constantes) sont racines de la fonction f.
On parle de **valeur critique** de l'équation différentielle

$$(Aut) \qquad y' = f(y)$$

Quelle conséquence pour les solutions?

Solutions stationnaires et sens de variation

Les **solutions stationnaires** (fonctions constantes) sont racines de la fonction f. On parle de **valeur critique** de l'équation différentielle

$$(Aut) \qquad y' = f(y)$$

Quelle conséquence pour les solutions?

Theorem

On a dans le cas d'une équation différentielle autonome les équivalences suivantes

$$f(y_0) = 0 \iff y'(t) = 0 \iff y(t) = y_0$$

En d'autres termes si la dérivée de la solution s'annule en point, elle est nécessaire constante. La représentation ci-contre **ne peut pas être** une solution d'équation différentielle autonome.

Solutions stationnaires et sens de variation

Les **solutions stationnaires** (fonctions constantes) sont racines de la fonction f.
On parle de **valeur critique** de l'équation différentielle

$$(Aut) \qquad y' = f(y)$$

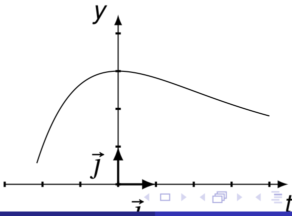
Quelle conséquence pour les solutions?

Theorem

On a dans le cas d'une équation différentielle autonome les équivalences suivantes

$$f(y_0) = 0 \iff y'(t) = 0 \iff y(t) = y_0$$

En d'autres termes si la dérivée de la solution s'annule en point, elle est nécessaire constante. La représentation ci-contre **ne peut pas être** une solution d'équation différentielle autonome.



Monotonie des solutions

Les remarques précédentes, jointes au théorème de Cauchy, montrent que, lorsque f est de classe C^1 , on a le résultat remarquable suivant :

Monotonie des solutions

Soit J un intervalle sur lequel f est de classe C^1 .
Si φ est une solution de $y' = f(y)$ alors φ est stationnaire ou strictement monotone sur son intervalle maximal.

Convexité des solutions

Pour étudier la convexité des fonctions, il faut étudier le sens de variations de la dérivée et donc le signe de la dérivée seconde or
on sait que $y' = f(y)$ donc $y'' = \left(f(y)\right)'$ ici on a la dérivée d'une fonction composée donc

$$y'' = y'f'(y) = f(y)f'(y)$$

Une étude du signe de f' conjugué avec le signe de f permet d'avoir la concavité de la solution (convexe, concave et point d'inflexion..)

Example

On considère l'équation différentielle $y' = y^2 - 1$

1. Quelles sont les solutions stationnaires?
2. Pour la solution y qui vérifie $y\left(t_0\right) = \dfrac{1}{2}$, donner le sens de variation de la solution et étudier sa concavité.

Limites

Nous sommes toujours dans le cadre d'une solution maximale à notre équation différentielle. La fonction f est C^1 sur l'intervalle qu'on suppose ici de la forme $]a; b[$ avec a et b pouvant être infinis.

Supposons que

$$(Aut) \qquad y' = f(y)$$

admette une solution maximale φ sur $I_0 =]\alpha; \beta[$.

1. Si φ est stationnaire, alors $I_0 = \mathbb{R}$.
2. Si φ est strictement croissante, alors on a les possibilités suivantes:
   - $\lim_{t \to \beta} \varphi(t) = b$
   - $\beta = +\infty$ et $\varphi(t)$ tend vers une valeur critique lorsque $t \to \beta$.

Exemple

Énoncé

Soit y la solution maximale de $y' = y^2 - 1$ avec $y(t_0) = \frac{1}{2}$.
Déterminer l'intervalle I_0 de la solution maximale et les limites aux bornes.

On sait déjà que :

Exemple

Énoncé

Soit y la solution maximale de $y' = y^2 - 1$ avec $y(t_0) = \frac{1}{2}$.
Déterminer l'intervalle I_0 de la solution maximale et les limites aux bornes.

On sait déjà que :

t	α	t_0	β
$y'(t)$		$-$	
Variations de y	$\cdot$	$\frac{1}{2}$	$\cdot$

Exemple

Énoncé

Soit y la solution maximale de $y' = y^2 - 1$ avec $y(t_0) = \dfrac{1}{2}$.

Déterminer l'intervalle I_0 de la solution maximale et les limites aux bornes.

On sait déjà que :

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	
Variations de y	1 $\searrow$	$\frac{1}{2}$ $\searrow$	-1

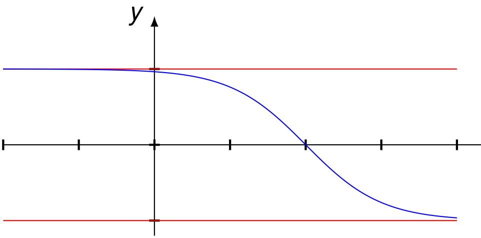
Exemple

Énoncé

Soit y la solution maximale de $y' = y^2 - 1$ avec $y(t_0) = \frac{1}{2}$.
Déterminer l'intervalle I_0 de la solution maximale et les limites aux bornes.

On sait déjà que :

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	
Variations de y	1	$\frac{1}{2}$	-1



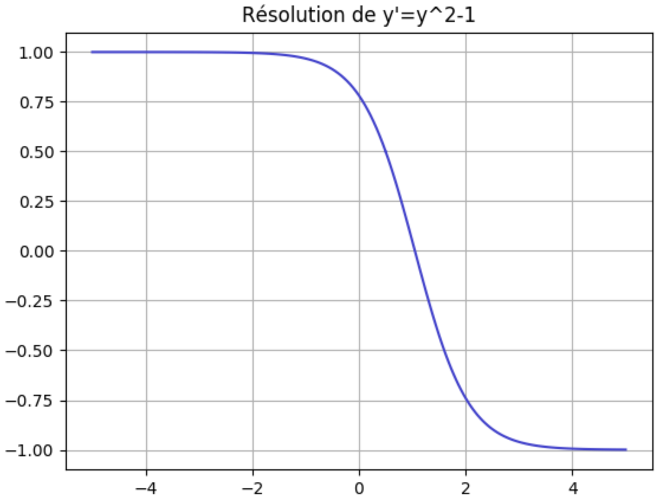
Exercices - à vous de jouer

Exercice

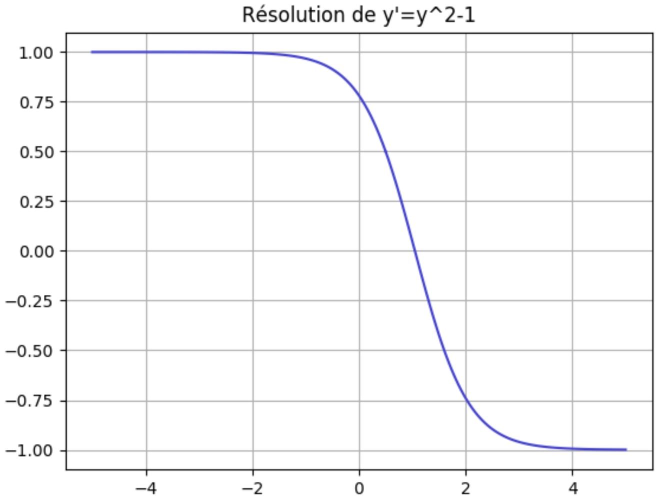
Etudier les solutions des équations différentielles suivantes

1. $y' = 1 + y^2$
2. $y' = y(y - 1)$
3. $y' = \sin y$
4. $y' = \ln y$
5. $y' = \sqrt{1 - y^2}$

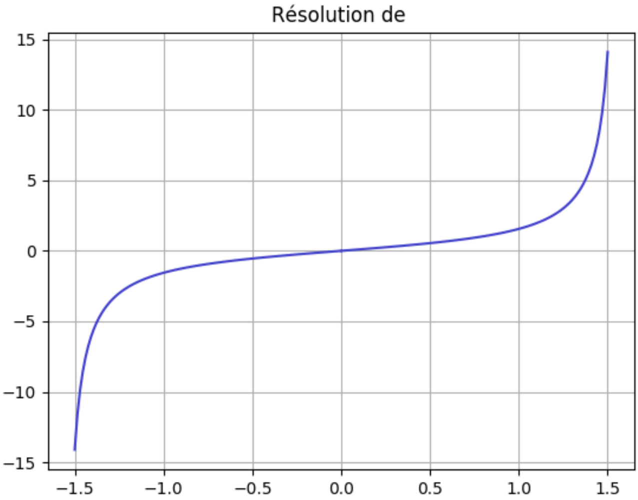
Les courbes



Les courbes



Les courbes



$(E) \quad y' = f(y, t)$

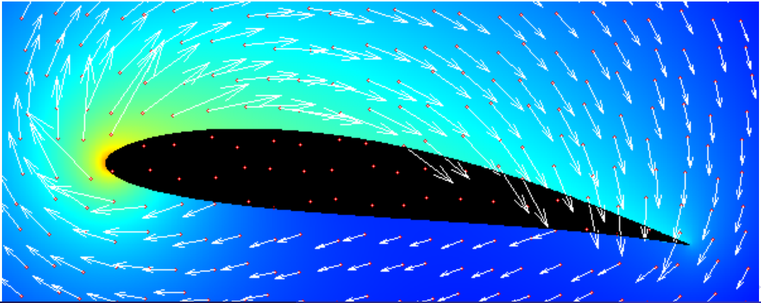
On considère une équation différentielle du type

$$(E) \quad y' = f(y, t)$$

On lui associe l'application

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \mapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ f(y, t) \end{bmatrix}}.$$

Une telle application $\overrightarrow{F}$ du plan s'appelle un champ de vecteurs .



Exemple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y^2 - t$$

Donc le champ de vecteur associé est

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \mapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - t \end{bmatrix}}.$$

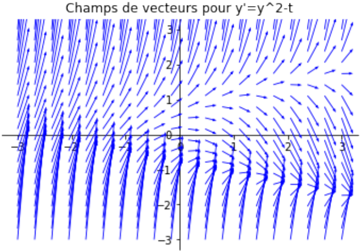
Exemple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y^2 - t$$

Donc le champ de vecteur associé est

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \longmapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - t \end{bmatrix}}.$$



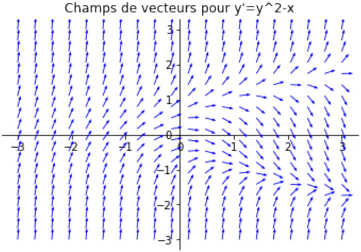
Exemple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y^2 - t$$

Donc le champ de vecteur associé est

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \mapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - t \end{bmatrix}}.$$



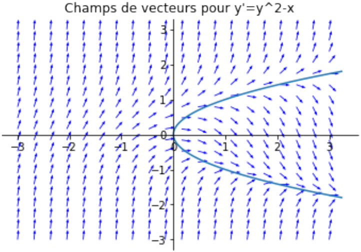
Exemple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y^2 - t$$

Donc le champ de vecteur associé est

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \mapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - t \end{bmatrix}}.$$



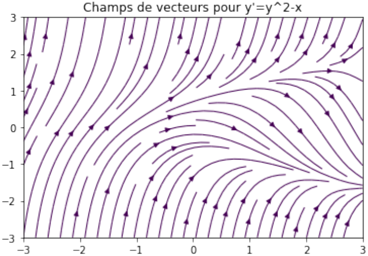
Exemple

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y' = y^2 - t$$

Donc le champ de vecteur associé est

$$\overrightarrow{F} : (t, y) \longmapsto \overrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ y^2 - t \end{bmatrix}}.$$



Exemple

Énoncé

Soit y la solution maximale de $y' = y^2 - 1$ avec $y(t_0) = \dfrac{1}{2}$.

On avait montré :

t	$-\infty$	t_0	$+\infty$
$y'(t)$		$-$	
Variations de y	1	$\frac{1}{2}$	-1

Exercice