Convergence

Valeur approchée de $\sqrt{2}$

Méthode à convergence quadratique

On considère la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 - 2$. On définit par récurrence la suite suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = x_n - \dfrac{f\left(u_n\right)}{f'\left(u_n\right)} \quad \text{pour } n > 0 \end{cases}$$

1. Montrer que $u_1 \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
3. En déduire que $\left(u_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.
4. Déterminer u_4 et comparer avec le résultat de la calculatrice.

Les valeurs de la suites

itération	valeur fractionnaire	décimales exactes
0	1	1
1	3/2	1
2	17/12	1,41
3	577/408	1,41421
4	665 857/470 832	1,41421356237
5	886 731 088 897/627 013 566 048	1,41421356237309504880168

Vitesse de convergence

Nous avons montré que :

- $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{\left(u_n - \sqrt{2}\right)^2}{2u_n}$.
- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2 - u_n^2}{2u_n}$.

1. Prouver que $u_{n+p} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\dfrac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^p}$ pour tout $p, n \geq 0$.
2. En sachant que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, montrer que $u_n - \sqrt{2} < 2,84\left(\dfrac{0,09}{2,82}\right)^{2^{n-1}}$.
3. Combien de termes faut-il calculer pour avoir p décimales exactes.

Quelques résultats

1. Base du format *A4*
2. $\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1\sqrt{2}}}}} = [1; 2, 2, 2, 2, 2 \ldots]$
3. $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdots$

$u_1 \geq \sqrt{2}$.

1. $u_1 = \dfrac{3}{2}$ or $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ donc on a bien $u_1 \geq \sqrt{2}$.
2. Quelques remarques pour la suite pour tout entier$n \geqslant 0$:
   - première expression :
   $$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} \tag{1}$$
   - Après simplification, on a :
   $$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n} \tag{2}$$
   - On peut alors par une récurrence immédiate prouver que
   $$u_n \quad > \quad 0 \tag{3}$$

pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

1. pour tout $n \geq 1$,d'après (1) on doit prouver que pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{2-u_n^2}{2u_n} \leq 0$ ou encore $u_n^2 - 2 \geq 0$ (en raison de (3))
2. Or à l'aide (2), on a :

$$u_n - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1}^2 + 2}{2u_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_{n-1} - \sqrt{2}\right)^2}{2u_{n-1}} \tag{4}$$

3. La fin devient trivial.

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$.

La suite u est décroissante à partir du premier terme et minorée par 0 et même par $\sqrt{2}$. Donc u est convergente vers un réel nommé l.

La fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{2x}$ est continue sur $]0;+\infty[$donc en passant à limite dans (2), on a $l = \dfrac{l^2+2}{2l}$ et sachant que la limite est nécessairement positive, on a $l = \sqrt{2}$.

$$u_{n+p} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^p} \quad \text{pour tout } p \geqslant 0, n \geqslant 1\ .$$

Nous allons procédé par récurrence sur p. Notons $H(p)$:

$$\text{pour tout } n \geqslant 0, \quad u_{n+p} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^p} \tag{5}$$

Initialisation: pour $p = 0$, $H(0)$ devient

$$u_{n+0} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^0} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{1} \leqslant u_n - \sqrt{2}$$

Donc $H(0)$ est vrai.

Hérédité: on suppose que pour un entier p fixé, on ait $H(p)$.

Hérédité

Hérédité: on suppose que pour un entier p fixé, on a $H(p)$.
Or

$$u_{n+p+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(u_{n+p} - \sqrt{2}\right)^2}{2u_{n+p}} \text{ d'après (3)}$$

Utilisons l'hyptohèse de récurrence :

$$0 \leqslant u_{n+p} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^p}$$

$$\left(u_{n+p} - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{2}\right)^2 \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^p \times 2}$$

$$u_{n+p+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2u_{n+p}} \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{p+1}}$$

Hérédité

Il faut maintenant majorer $\dfrac{1}{u_{n+p}}$ pour avoir le résultat.

À partir du terme de rang 1, u est minoré par $\sqrt{2}$, donc $\dfrac{1}{u_{n+p}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$u_{n+p+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2u_{n+p}} \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{p+1}} \leqslant \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2\sqrt{2}} \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{p+1}}$$

$$u_{n+p+1} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2} \left(\frac{u_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{p+1}}$$

On vient de prouver l'hérédité et par conséquent le résultat.

Majoration $u_n - \sqrt{2}$

1. Grâce à la question précédente (5), on peut écrire

$$u_{1+n-1} - \sqrt{2} \leqslant 2\sqrt{2}\left(\frac{u_1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)^{2^{n-1}}$$

2. En utilisant l'encadrement proposé, on a
   2.1 $2\sqrt{2} < 2,84$
   2.2 $\dfrac{1,5 - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \leqslant \dfrac{0,09}{2,82}$ on majore le numérateur et on minore le dénominateur.
3. donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{2} \leqslant 2,84\left(\frac{0,09}{2,82}\right)^{2^{n-1}}$$

Estimation de n pour p décimales exactes

Pour p décimales exactes de $\sqrt{2}$, il suffit d'avoir $2,84\left(\dfrac{0,09}{2,82}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 10^{-p}$.

On obtient $\ln 2,84 + 2^{n-1}\ln\left(\dfrac{0,09}{2,82}\right) \leqslant -p\ln 10 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geqslant \dfrac{-p\ln 10 - \ln 2,84}{\ln\left(\dfrac{0,09}{2,82}\right)}$ en changeant de signe numérateur et dénominateur on obtient

$$2^{n-1} \geqslant \frac{p\ln 10 + \ln 2,84}{\ln\left(\dfrac{2,82}{0,09}\right)}$$

et enfin

$$n \geqslant 1 + \ln\left(\frac{p\ln 10 + \ln 2,84}{\ln 2,82 - \ln 0,09}\right)$$